

1. はじめに

複鉄筋矩形 RC 断面の曲げ応力計算は、コンクリートの引張応力を無視する仮定のもとに中立軸位置を定めた後、コンクリート圧縮縁応力と引張鉄筋応力を求めることで実施されるが、断面に軸力と曲げモーメントが作用する場合には、中立軸算定式が RC 断面諸元や軸力偏心位置をパラメータとした 3 次方程式で与えられる。先に提示した曲げ応力計算では、マクロやエクセルソルバーを用いた繰り返し計算によって中立軸位置を算定している。

一方、3 次方程式に対しては、やや複雑ではあるが、解の公式が求められており、解析式による直接的な求解が可能である。本報告では、3 次方程式の解の公式（カルダノの方法）を利用して中立軸位置を定め、さらに RC 断面曲げ応力度の算出を行った。本方法によれば、エクセルマクロ等を使用せず、エクセルシートのセルに解析式を埋め込むことで、エクセル表計算によって曲げ応力度の算出が可能となる。

本報告では、上記の方法による曲げ応力計算をエクセルシートに実装したので、データ入力方法や使用方法について説明するものである。

なお、添付したエクセルシートは自由に使用していただいて結構ですが、結果の妥当性判断については使用者に委ねることとします。

2. 複鉄筋矩形断面の曲げ応力度

2.1 中立軸が断面内にある場合

中立軸が断面内にある場合、複鉄筋矩形断面の中立軸算定式は、次式で表される[吉川ら(2024)]。なお、式(1)においては、参考資料で η と表示した変数を δ に変更している。

$$k^3 + 3\delta k^2 + 6n\{p_1(1 + \delta) + p_2(\delta + \gamma)\}k - 6n\{p_1(1 + \delta) + p_2\gamma(\delta + \gamma)\} = 0 \quad (1)$$

ここに、 k ：中立軸比（= x/d_1 ）

x ：圧縮縁から中立軸までの距離

d_1 ：有効高（圧縮縁から引張鉄筋までの距離）

n ：ヤング係数比（=15）

p_1 ：引張鉄筋比（= $A_{s1}/(bd_1)$ ）

A_{s1} ：引張鉄筋断面積

b ：断面幅

p_2 ：圧縮鉄筋比（= $A_{s2}/(bd_1)$ ）

A_{s2} ：圧縮鉄筋断面積

δ ：圧縮縁から軸力偏心位置までの距離の有効高に対する比（= $(e - \gamma_c)/d_1$ ）

e ：断面図心から軸力偏心位置までの距離（= M/N ）

M ：曲げモーメント

N ：軸力

γ : 有効高に対する圧縮鉄筋被りの比 ($=d_2/d_1$)

d_2 : 圧縮鉄筋被り (圧縮縁から圧縮鉄筋までの距離)

式(1)より、中立軸比 k は、引張鉄筋比 p_1 、圧縮鉄筋比 p_2 、圧縮縁から軸力偏心位置までの距離の有効高に対する比 δ 、および有効高に対する圧縮鉄筋被りの比 γ の 4 つのパラメータにより決定できることがわかる。

次に、圧縮縁におけるコンクリート応力度 σ_c 、引張鉄筋応力度 σ_s および圧縮鉄筋応力度 σ_s' が、次式で表される。

$$\sigma_c = \frac{N/(bd_1)}{\frac{1}{2}k - np_1 \frac{1-k}{k} + np_2 \frac{k-\gamma}{k}} \quad (2)$$

$$\sigma_s = \left(\frac{1}{k} - 1\right) n \sigma_c \quad (3)$$

$$\sigma_s' = -\left(1 - \frac{\gamma}{k}\right) n \sigma_c \quad (4)$$

上式において、 σ_c は圧縮正、 σ_s および σ_s' は引張正としている。

なお、式(1)に含まれるパラメータ δ には、圧縮縁から断面図心位置までの距離 y_c が必要になるが、本報告では軸力が断面中心に作用すると仮定し、 $y_c=h/2$ (h : 断面高さ) とした。

2.2 中立軸が断面外にある場合

断面全体が圧縮応力あるいは引張応力となる場合には、中立軸が断面外に存在し、2.1 の諸式は適用できない。本報告では、全断面圧縮時については、全断面有効に対する応力算定式を適用した。

圧縮側および引張側のコンクリート縁応力 σ_c および σ_t は、次式で表される。

$$\sigma_c = \frac{N}{A_g} + \frac{M}{I_g} y_c \quad (5)$$

$$\sigma_t = \frac{N}{A_g} - \frac{M}{I_g} (h - y_c) \quad (6)$$

ここに、 N, M : 軸力および曲げモーメント

y_c : 圧縮縁から断面図心までの距離 (次式を参照)

h : 断面高さ

A_g, I_g : 全断面有効時の換算断面積および換算断面 2 次モーメント (次式を参照)

$$A_g = bh + n(A_{s1} + A_{s2}) \quad (7)$$

$$I_g = \frac{1}{3}b\{y_c^3 + (h - y_c)^3\} + n\{A_{s1}(d_1 - y_c)^2 + A_{s2}(y_c - d_2)^2\} \quad (8)$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}bh^2 + n(A_{s1}d_1 + A_{s2}d_2)}{bh + n(A_{s1} + A_{s2})} \quad (9)$$

ここに、 b : 断面幅

n : ヤング係数比 (=15)

A_{s1} : 引張鉄筋断面積

A_{s2} : 圧縮鉄筋断面積

また、引張および圧縮鉄筋応力 σ_s および σ_s' は次式で表される。

$$\sigma_s = -n \left\{ \sigma_c - \frac{d_1}{h} (\sigma_c - \sigma_t) \right\} \quad (11)$$

$$\sigma'_s = -n \left\{ \sigma_c - \frac{d_2}{h} (\sigma_c - \sigma_t) \right\} \quad (12)$$

上式において、コンクリート応力 σ_c および σ_t は圧縮正、鉄筋応力 σ_s および σ'_s は引張正としている。

次に、全断面圧縮時では、式(7)および(8)の換算断面積および換算断面 2 次モーメント、式(9)の y_c において、コンクリート寄与分をゼロ値とすることにより、鉄筋応力を求めた。また、軸力作用位置を断面中心とし、図心位置 y_c と断面中心との差による付加モーメント $N(y_c - h/2)$ を考慮した。

3. 中立軸比 k の解

中立軸比 k に関する方程式は、2.1 で提示したように、以下の 3 次方程式で表される。

$$k^3 + Ak^2 + Bk + C = 0 \quad (13)$$

$$\text{ここに、} A = 3\delta \quad (13a)$$

$$B = 6n\{p_1(1 + \delta) + p_2(\delta + \gamma)\} \quad (13b)$$

$$C = -6n\{p_1(1 + \delta) + p_2\gamma(\delta + \gamma)\} \quad (13c)$$

なお、式(13a)～(13c)に含まれるパラメータ n 、 p_1 、 p_2 、 δ および γ については、2.1 の記載を参照されたい。

ここで、 $k = k' - A/3$ に置き換えれば、次式を得る。

$$k'^3 + Pk' + Q = 0 \quad (14)$$

$$\text{ここに、} P = -\frac{A^2}{3} + B \quad (14a)$$

$$Q = \frac{2}{27}A^3 - \frac{AB}{3} + C \quad (14b)$$

3 次方程式(14)は、カルダノの方法によって解が得られており、式(13)の解が以下の通り求めることができる[吉田ら(1975)]。判別式 D の符号により、以下の 2 通りの実数解が存在する。

$$(1) D = \left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3 > 0 \quad \text{のとき}$$

1 個の実数解が存在し (他の 2 個は複素数解)、式(13)の解が次式で表される。

$$k_1 = \sqrt[3]{r_1} + \sqrt[3]{r_2} - \frac{A}{3} \quad (17)$$

$$\text{ここに、} r_1 = -\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3} \quad (17a)$$

$$r_2 = -\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3} \quad (17b)$$

$$(2) D = \left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3 \leq 0 \quad \text{のとき}$$

3 個の実数解が存在し、式(13)の解が次式で得られる。特に、 $D=0$ のとき、 k_2 と k_3 は同一 (重根) となる。

$$k_1 = 2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{A}{3} \quad (18)$$

$$k_2 = -2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\theta}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{A}{3} \quad (19)$$

$$k_3 = -2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{A}{3} \quad (20)$$

$$\text{ここに、 } r = \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left|\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3\right|} \quad (18a)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{Q}{2r}\right) \quad (18b)$$

4. エクセルシートの説明

エクセルシートは、「入力データおよび発生応力」と「中立軸および応力計算」の 2 つである。以下に、これらのシートについて説明する。

4.1 シート「入力データおよび発生応力」

断面力や断面諸元などの入力パラメータの入力および応力度の出力を行うシートである。

入力データは、以下の通りである。

(1) 通し番号

入力するデータの通し番号を、1 から順に入力する。なお、通し番号は、エクセル内の計算に影響しない。

(2) 曲げモーメント M(kNm)

曲げモーメントの値を、kNm 単位で入力する。負値も入力可能である。負値は負曲げモーメントを意味するが、エクセル内での計算は、M を正値に変更し、圧縮鉄筋断面積と引張鉄筋断面積を逆転させ、引張鉄筋かぶり d_1 を $h-d_2$ に置き換え、圧縮鉄筋かぶり d_2 を $h-d_1$ に置き換える。

(3) 軸力 N(kN)

軸力の値を、kN 単位で入力する。負値も入力可能である。負値は引張軸力を意味する。

(4) 全高 h(cm)

部材断面高さを cm 単位で入力する。

(5) 断面幅 b(cm)

部材断面幅を cm 単位で入力する。

(6) コン許容 σ_{ca} (N/mm²)

コンクリート許容応力度を N/mm^2 単位で入力する。コンクリート発生応力と比較して照査を行うために使用する。

(7)鉄筋許容 $\sigma_{sa}(N/mm^2)$

鉄筋許容応力度を N/mm^2 単位で入力する。引張鉄筋発生応力と比較して照査を行うために使用する。

(8)引張鉄筋被り $d_1(cm)$

引張鉄筋被りを cm 単位で入力する。引張鉄筋被りは、断面圧縮縁から引張鉄筋までの距離であり、有効高と同一である。(断面引張縁からの距離ではないことに注意)

(9)引張鉄筋量 $As_1(cm^2)$

断面幅 $b(cm)$ 当たりに配置される引張鉄筋量を、 cm^2 単位で入力する。

(10)圧縮鉄筋被り $d_2(cm)$

圧縮鉄筋被りを cm 単位で入力する。圧縮鉄筋被りは、断面圧縮縁から圧縮鉄筋までの距離である。

(11)圧縮鉄筋量 $As_2(cm^2)$

断面幅 $b(cm)$ 当たりに配置される圧縮鉄筋量を、 cm^2 単位で入力する。

応力度等の出力は、以下の通りである。

(1)中立軸位置

中立軸が断面内にあるとき、圧縮縁から中立軸までの距離を cm 単位で出力する。中立軸が断面外にあるとき、全断面圧縮時は「圧縮」、全断面引張時は「引張」を出力する。

(2)コン応力 $\sigma_c(N/mm^2)$

コンクリート圧縮縁における応力 N/mm^2 単位で出力する。圧縮正である。全断面引張のとき、0 を出力する。

(3)鉄筋応力 $\sigma_s(N/mm^2)$

引張鉄筋応力を N/mm^2 単位で出力する。引張正である。

(4)圧縮鉄筋応力 $\sigma_{s'}(N/mm^2)$

圧縮鉄筋応力を N/mm^2 単位で出力する。引張正である。

(5)照査値 σ_c/σ_{ca}

コンクリート許容応力度に対するコンクリート発生応力の比を出力する。

(6)照査値 σ_s/σ_{sa}

鉄筋許容応力度に対する引張鉄筋発生応力の比を出力する。

(7)判定(σ_c)

コンクリート圧縮応力の安全性判定を行う。 σ_c/σ_{ca} が1より小さいとき「OK」、1以上のとき「NG」を出力する。

(8)判定(σ_s)

鉄筋引張応力の安全性判定を行う。 σ_s/σ_{sa} が1より小さいとき「OK」、1以上のとき「NG」を出力する。

表 2-1 に、エクセルシート「入力データと発生応力」の例を示す。

表 2-1 シート「入力データと発生応力」の例

通し番号	曲げモーメント M(kNm)	軸力 N(kN)	全高 h(cm)	断面幅 b(cm)	コン許容 σ_{ca} (N/mm ²)	鉄筋許容 σ_{sa} (N/mm ²)	引張鉄筋被り d1(cm)	引張鉄筋量 As1(cm ²)	圧縮鉄筋被り d2(cm)	圧縮鉄筋量 As2(cm ²)
1	34.1	69.3	40	100	8	160	28	11.46	12	11.46
2	-24.5	101.0	40	100	8	160	28	11.46	12	11.46
3	22.9	-82.4	40	100	8	160	28	11.46	12	11.46
4	8.5	198.5	40	100	8	160	28	11.46	12	11.46
5	-1.9	-103.1	40	100	12	240	28	11.46	12	11.46

鉄筋被りは、正曲げ時の圧縮縁からの距離である。
したがって、引張鉄筋被りは有効高さである。

中立軸位置 x(cm)	コン応力 σ_c (N/mm ²)	鉄筋応力 σ_s (N/mm ²)	圧縮鉄筋応力 $\sigma_{s'}$ (N/mm ²)	照査値 σ_c/σ_{ca}	照査値 σ_s/σ_{sa}	判定 (σ_c)	判定 (σ_s)
10.542	3.167	78.669	6.569	0.396	0.492	OK	OK
13.355	2.034	33.462	-3.096	0.254	0.209	OK	OK
6.774	2.478	116.457	28.671	0.310	0.728	OK	OK
圧縮	0.763	-5.021	-8.691	0.095	-0.031	OK	OK
引張	0.000	55.249	34.698	0.000	0.230	OK	OK

4.2 シート「中立軸および応力計算」

本シートは、断面力および断面諸元に基づき、中立軸位置および応力度計算を行うシートである。

以下に示すパラメータを出力している。

(1) 曲げモーメント $M(\text{kNm})$

シート「入力データおよび発生応力」に入力された曲げモーメントを、正值に変換した値を出力している。

(2) 軸力 $N(\text{kN})$

シート「入力データおよび発生応力」に入力された軸力のコピー値である。

(3) 全高 $h(\text{cm})$ 、断面幅 $b(\text{cm})$

シート「入力データおよび発生応力」に入力された全高および断面幅のコピー値である。

(4) 引張鉄筋被り $d1(\text{cm})$ 、引張鉄筋断面積 $As1(\text{cm}^2)$ 、圧縮鉄筋被り $d2(\text{cm})$ 、 および圧縮鉄筋断面積 $As2(\text{cm}^2)$

正曲げ ($M > 0$) の場合は、シート「入力データおよび発生応力」に入力された値のコピー値である。一方、負曲げ ($M < 0$) の場合は、引張鉄筋および圧縮鉄筋の諸元を逆転させた値を出力する。これは、応力度算出式の誘導時の断面仮定として、圧縮側を断面上部に引張側を断面下部に設定しているためである。

(5) n

ヤング係数比である。許容応力度法で使用される $n=15$ の値に固定している。

(6) $p1$

引張鉄筋比であり、 $p1=As1/(b \cdot d1)$ で算出される。

(7) $p2$

圧縮鉄筋比であり、 $p2=As2/(b \cdot d1)$ で算出される。

(8) $yc(=h/2)$ 、 $yc(\text{図心})$ および $yc(\text{図心 2})$

断面図心位置を表すパラメータであり、圧縮縁から図心までの距離を表す。3種の yc を出力しているが、それぞれ断面中心位置、コンクリートと鉄筋を考慮した断面図心位置、および鉄筋のみを考慮した図心位置である。

本パラメータは、軸力作用位置により、使用する yc を区別している。中立軸が断面内にある RC 断面に対しては、軸力作用位置を断面中心として $yc(=h/2)$ を使用し、また全断面圧縮時には軸力作用位置を断面図心位置として $yc(\text{図心})$ を使用し、さらに全断面引張時には軸力作用位置を断面中心として $yc(=h/2)$ と $yc(\text{図心 2})$ を使用している。

(9)e

$e=M/N$ (M : 曲げモーメント、 N : 軸力) で定義される軸力偏心距離である。軸力作用位置から曲げモーメントを考慮した偏心軸力までの距離である。軸力 $N>0$ (圧縮) のとき、正值、 $N<0$ (引張) のとき負値となる。

(10) δ

断面圧縮縁から偏心軸力位置までの距離の有効高に対する比であり、 $\delta=(e-yc)/d1$ で定義される。軸力正のとき、 -0.5 から無限大まで変化し、曲げモーメント $M=0$ のとき -0.5 、軸力 $N=0$ のとき無限大に対応する。軸力負のとき、 -0.5 から負の無限大まで変化し、 $M=0$ のとき -0.5 、軸力 $N=0$ のとき負の無限大に対応する。

(11) γ

圧縮鉄筋被り $d2$ の有効高 $d1$ に対する比であり、 $\gamma=d2/d1$ で算出される。

(12)A、B および C

中立軸比 k を定める 3 次方程式の係数値であり、次式で算出される。

$$A = 3\delta$$

$$B = 6n\{p_1(1 + \delta) + p_2(\delta + \gamma)\}$$

$$C = -6n\{p_1(1 + \delta) + p_2\gamma(\delta + \gamma)\}$$

(13)P および Q

中立軸算定式の係数値 A、B および C により定められる値で、次式で算出される。

$$P = -\frac{A^2}{3} + B$$

$$Q = \frac{2}{27}A^3 - \frac{AB}{3} + C$$

(14)判別式 D

3 次方程式の解の性質を決定する値であり、P および Q を用い次式で表される。

$$D = \left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3$$

(15)実根の数

実数解の数を表し、 $D>0$ のとき 1 を、 $D\leq 0$ のとき 3 を出力する。

(16) $r1$ 、 $r2$ 、 r および θ

P および Q を用い、次式で表される。

$$D>0 \text{ のとき} : r_1 = -\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3} \quad , \quad r_2 = -\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3}$$

$$D\leq 0 \text{ のとき} : r = \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left|\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3\right|} \quad , \quad \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{Q}{2r}\right)$$

(17)k1、k2 および k3

中立軸比 k の 3 つの解で、次式で表される。

$$D>0 \text{ のとき} : k_1 = \sqrt[3]{r_1} + \sqrt[3]{r_2} - \frac{A}{3}$$

$$D \leq 0 \text{ のとき} : k_1 = 2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{A}{3}、k_2 = -2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\theta}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{A}{3}、k_3 = -2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{A}{3}$$

(18)中立軸比 k

3 つの解 k1、k2 および k3 のうち、1 つを選択している。D>0 のとき、k1 を選択する。D≤0 のとき、k1 および k3 のうち 1 よりも小さい正值、あるいは k1 を選択する。

(19)中立軸位置 x

圧縮縁から中立軸までの距離 x を、中立軸比 k により $x=k \cdot d_1$ により算出する。ただし、x が断面高さ h よりも大きい場合、軸力正のとき全断面圧縮、軸力負のとき全断面引張と判断し、それぞれ「圧縮」、「引張」を出力する。

(20)σc、σs および σs'

コンクリート圧縮縁応力、引張鉄筋応力および圧縮鉄筋応力を出力する。中立軸が断面内にある場合は、RC 断面計算による値を、中立軸が断面外にある場合は、全断面有効時の応力算出式による値を出力する。

中立軸が断面内にある場合、発生応力度は次式で表される。

$$\sigma_c = \frac{N/(bd_1)}{\frac{1}{2}k - np_1 \frac{1-k}{k} + np_2 \frac{k-\gamma}{k}}$$

$$\sigma_s = \left(\frac{1}{k} - 1\right) n \sigma_c$$

$$\sigma_s' = -\left(1 - \frac{\gamma}{k}\right) n \sigma_c$$

上記式において、コンクリート応力は圧縮正、鉄筋応力は引張正と定義している。

(21)Ag、Ig、Ag・コン無視および Ig・コン無視

全断面圧縮あるいは全断面引張時の応力度を算出するための、換算断面積および換算断面 2 次モーメントである。全断面引張時には、コンクリートの抵抗を無視するためコンクリート断面積の寄与を考慮しない。

全断面圧縮時の換算断面積および換算断面 2 次モーメントは、次式で表される。

$$A_g = bh + n(A_{s1} + A_{s2})$$

$$I_g = \frac{1}{3}b\{y_c^3 + (h - y_c)^3\} + n\{A_{s1}(d_1 - y_c)^2 + A_{s2}(y_c - d_2)^2\}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}bh^2 + n(A_{s1}d_1 + A_{s2}d_2)}{bh + n(A_{s1} + A_{s2})}$$

(22)σc・圧縮、σt・圧縮、σs・圧縮および σs'・圧縮

全断面圧縮時のコンクリートおよび鉄筋の発生応力を出力している。次式により算出した。

$$\sigma_c = \frac{N}{A_g} + \frac{M}{I_g} y_c$$

$$\sigma_t = \frac{N}{A_g} - \frac{M}{I_g} (h - y_c)$$

$$\sigma_s = -n \left\{ \sigma_c - \frac{d_1}{h} (\sigma_c - \sigma_t) \right\}$$

$$\sigma'_s = -n \left\{ \sigma_c - \frac{d_2}{h} (\sigma_c - \sigma_t) \right\}$$

上記式はそれぞれ、コンクリート圧縮縁応力、コンクリート引張縁応力、引張鉄筋応力および圧縮鉄筋応力を示しており、コンクリート応力は圧縮正、鉄筋応力は引張正で定義している。なお、上記式を適用した場合、軸力作用位置は断面図心位置となる。

(23) σ_c ・引張、 σ_t ・引張、 σ_s ・引張および σ'_s ・引張

全断面引張時のコンクリートおよび鉄筋の発生応力を出力している。適用した式は、全断面圧縮時と同様であるが、 A_g および I_g の計算にコンクリート寄与分を無視することで、断面力に対する抵抗を引張および圧縮鉄筋に全て負担させている。また、軸力作用位置は断面中心 ($h/2$ 点) と仮定し、鉄筋のみの図心位置と断面中心との差による軸力の付加モーメントを考慮している。

表 2-2 に、エクセルシート「中立軸および応力計算」の例を示す。

表 2-2 シート「中立軸および応力計算」の例

通し番号	曲げモーメント M(kNm)	軸力 N(kN)	全高 h(cm)	断面幅 b(cm)	引張鉄筋被り d1(cm)	引張鉄筋量 As1(cm2)	圧縮鉄筋被り d2(cm)	圧縮鉄筋量 As2(cm2)
1	34.131827	69.25827	40	100	28	11.46	12	11.46
2	24.47264	101.0427	40	100	28	11.46	12	11.46
3	22.93878	-82.3881	40	100	28	11.46	12	11.46
4	8.4932242	198.5356	40	100	28	11.46	12	11.46
5	1.8841059	-103.08	40	100	28	11.46	12	11.46

15			コン+鉄筋		鉄筋のみ		yc=h/2を使用				
	p1	p2	yc(cm) (=h/2)	yc(cm) (図心)	yc(cm) (図心2)	e(cm) (=M/N)	δ (=e-yc/d1)	γ (=d2/d1)	A (k^2の係数)	B (kの係数)	C (定数項)
15	0.004093	0.004093	20.000	20.000	20.000	49.282	1.0458	0.4286	3.1374	1.2967	-0.9863
15	0.004093	0.004093	20.000	20.000	20.000	24.220	0.1507	0.4286	0.4522	0.6373	-0.5153
15	0.004093	0.004093	20.000	20.000	20.000	-27.842	-1.7087	0.4286	-5.1260	-0.7326	0.4631
15	0.004093	0.004093	20.000	20.000	20.000	4.278	-0.5615	0.4286	-1.6845	0.1126	-0.1405
15	0.004093	0.004093	20.000	20.000	20.000	-1.828	-0.7796	0.4286	-2.3387	-0.0481	-0.0258

P	Q	判別式 D	実根の数	r1 (r)	r2 (r)	θ	k1	k2	k3
-1.9843	-0.0549	-0.28863	3	0.537943761	0.537943761	1.519752	0.377	-2.4404	-1.07346
0.5691	-0.6045	0.09819	1	0.615614907	-0.011089765	0	0.477	-	-
-9.4911	-10.7654	-2.69160	3	5.627187427	5.627187427	0.295847	5.249	-0.3647	0.241939
-0.8333	-0.4314	0.02510	1	0.374120506	0.057282786	0	1.668	-	-
-1.8713	-1.0108	0.01275	1	0.618295635	0.392499768	0	2.364	-	-

中立軸比 k	中立軸位置 x(cm)	引張正			yc=図心を使用		yc=図心2を使用		yc=図心を使用		yc=図心を使用		σ_c ・引張 (N/mm2)	σ_t ・引張 (N/mm2)	σ_s ・引張 (N/mm2)	σ'_s ・引張 (N/mm2)
		σ_c (N/mm2)	σ_s (N/mm2)	σ'_s (N/mm2)	Ag (cm2)	Ig (cm4)	Ag・コン無視 (cm2)	Ig・コン無視 (cm4)	σ_c ・圧縮 (N/mm2)	σ_t ・圧縮 (N/mm2)	σ_s ・圧縮 (N/mm2)	σ'_s ・圧縮 (N/mm2)				
0.377	10.542	3.1671	78.669	6.569	4343.8	555336.5	343.8	22003.2	1.389	-1.070	4.964	-36.443	33.039	-29.010	155.929	-216.364
0.477	13.355	2.0343	33.462	-3.096	4343.8	555336.5	343.8	22003.2	1.114	-0.649	1.799	-22.582	25.184	-19.306	89.333	-177.553
0.242	6.774	2.4779	116.457	28.671	4343.8	555336.5	343.8	22003.2	0.636	-1.016	7.802	-29.733	18.454	-23.247	161.048	-89.156
1.668	圧縮	0.7629	-5.021	-8.691	4343.8	555336.5	343.8	22003.2	0.763	0.151	-5.021	-8.691	13.495	-1.945	-40.301	-132.941
2.364	引張	0.0000	55.249	34.698	4343.8	555336.5	343.8	22003.2	-0.169	-0.305	3.967	0.611	-1.286	-4.711	55.249	34.698

5. 試算例

5.1 断面諸元および計算ケース

設定した断面諸元を表 5-1 に示す。計算ケースについては、表 5-2 に示す通り、断面力を変更した 5 ケースとした。

表 5-1 断面諸元

項目	設定値
断面高さ h(cm)	40
断面幅 b(cm)	100
圧縮鉄筋量 A_{s2} (cm ²)	11.46
引張鉄筋量 A_{s1} (cm ²)	11.46
圧縮鉄筋被り d2(cm)	12
有効高 d1(cm)	28
コンクリート許容応力度(N/mm ²)	8
鉄筋許容応力度(N/mm ²)	160

表 5-2 計算ケース

ケース番号	曲げモーメント (kNm)	軸力 (kN)	備考
1	34.1	69.3	圧縮軸力・正曲げ
2	-24.5	101.0	圧縮軸力・負曲げ
3	22.9	-82.4	引張軸力・正曲げ
4	8.5	198.5	全断面圧縮
5	-1.9	-103.1	全断面引張

5.2 計算結果

表 5-3 に、本エクセルによる計算結果を示す。検証のため、先に作成したマクロ（「矩形・円形・T形 RC 断面の曲げ応力算出マクロ」）による計算結果と市販ソフト（フォーラムエイト「ES」）による計算結果を、表 5-4 および 5-5 に示す。本エクセルの結果は、マクロおよび市販ソフトと良い一致を示すことがわかる。

表 5-3 計算結果（本エクセル）

本エクセル(A)				
ケース 番号	中立軸位置 x(cm)	コン応力 σ_c (N/mm ²)	鉄筋応力 σ_s (N/mm ²)	圧縮鉄筋応力 $\sigma_{s'}$ (N/mm ²)
1	10.542	3.167	78.669	6.569
2	13.355	2.034	33.462	-3.096
3	6.774	2.478	116.457	28.671
4	圧縮	0.763	-5.021	-8.691
5	引張	0.000	55.249	34.698

表 5-4(a) 計算結果 (マクロ)

マクロ(B)				
ケース 番号	x(cm)	σ_c (N/mm ²)	σ_s (N/mm ²)	$\sigma_{s'}$ (N/mm ²)
1	10.542	3.167	78.669	6.569
2	13.355	2.034	33.461	-3.096
3	6.774	2.478	116.457	28.671
4	49.885	0.763	-5.021	-8.691
5	-15.015	-0.305	55.249	34.698

表 5-4(b) 比較 (本エクセル vs マクロ)

比(A/B)				
ケース 番号	比(x)	比(σ_c)	比(σ_s)	比($\sigma_{s'}$)
1	1.000	1.000	1.000	1.000
2	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000
4		1.000	1.000	1.000
5			1.000	1.000

表 5-5(a) 計算結果 (市販ソフト)

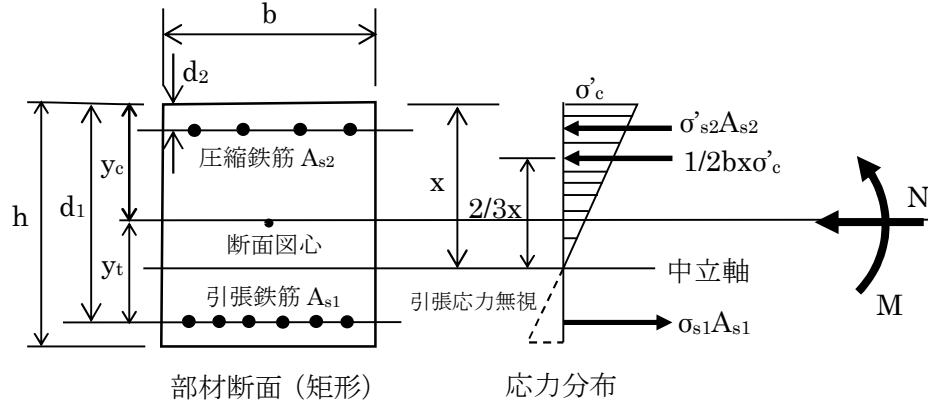
市販ソフト(C)		
ケース 番号	σ_c (N/mm ²)	σ_s (N/mm ²)
1	3.167	78.670
2	2.034	33.463
3	2.478	116.455
4	0.763	0.000
5	0.000	55.249

表 5-5(b) 比較 (本エクセル vs 市販ソフト)

比(A/C)		
ケース 番号	比(σ_c)	比(σ_s)
1	1.000	1.000
2	1.000	1.000
3	1.000	1.000
4	1.000	
5		1.000

参考資料 複鉄筋矩形断面の曲げ応力算定式の導出

複鉄筋の矩形断面を仮定し、コンクリート圧縮縁応力および鉄筋応力の算出式を誘導する。



参図 1 複鉄筋矩形断面での断面仮定

<記号の意味>

- h : 部材高 (全高)
- d₁ : 有効高 (圧縮縁から引張鉄筋中心位置までの距離)
- d₂ : 圧縮鉄筋の芯かぶり (圧縮縁から圧縮鉄筋中心位置までの距離)
- A_{s1} : 引張鉄筋断面積、A_{s2} : 圧縮鉄筋断面積
- b : 部材幅、x : 圧縮縁から中立軸までの距離
- y_t : 図心位置 (引張鉄筋位置からの距離)、y_c : 圧縮縁から断面図心までの距離
- σ'_c : 圧縮縁でのコンクリート圧縮応力
- σ_{s1} : 引張鉄筋の応力
- σ'_{s2} : 圧縮鉄筋の応力
- N' : 部材断面に作用する軸力 (圧縮力を正とする)
- M : 部材断面に作用する曲げモーメント (下縁側に引張を発生させる向きを正とする)
- e : 軸力偏心距離 (e=M/N')
- E_s : 鉄筋のヤング係数
- E_c : コンクリートのヤング係数
- n : ヤング係数比 (=E_s/E_c) (n=15 とする)

圧縮鉄筋応力 σ'_{s2} および引張鉄筋応力 σ_{s1} は、コンクリート圧縮応力 σ'_c により、次式で表される。

$$\sigma'_{s2} = E_s \frac{\sigma'_c x - d_2}{E_c x} = n \sigma'_c \frac{x - d_2}{x} \quad (a1)$$

$$\sigma_{s1} = E_s \frac{\sigma'_c x - d_2}{E_c x} = n \sigma'_c \frac{d_1 - x}{x} \quad (a2)$$

RC 断面における軸力の釣り合いにより、次式が成立する。

$$N' = \frac{1}{2} b \sigma'_c x + A_{s2} \sigma'_{s2} - A_{s1} \sigma_{s1} \quad (a3)$$

また、RC断面における引張鉄筋位置回りのモーメントの釣り合いにより、次式が成立する。

$$M + N' y_t = \frac{1}{2} b x \sigma'_c \left(d_1 - \frac{x}{3} \right) + A_{s2} \sigma'_{s2} (d_1 - d_2) \quad (\text{a4})$$

式(a1)および(a2)を、式(a3)および(a4)に代入すれば、次式を得る。

$$N' = \frac{b x}{2} \sigma'_c + n A_{s2} \frac{x-d_2}{x} \sigma'_c - n A_{s1} \frac{d_1-x}{x} \sigma'_c \quad (\text{a5})$$

$$M + N' y_t = \frac{b x}{2} \sigma'_c \left(d_1 - \frac{x}{3} \right) + n A_{s2} \frac{(x-d_2)}{x} (d_1 - d_2) \sigma'_c \quad (\text{a6})$$

したがって、 $(M + N' y_t) / N'$ を計算すれば、 σ'_c を消去できる。

$$\frac{M + N' y_t}{N'} = \frac{b x^2 (3d_1 - x) + 6n A_{s2} (x - d_2) (d_1 - d_2)}{3b x^2 + 6n A_{s2} (x - d_2) - 6n A_{s1} (d_1 - x)} \quad (\text{a7})$$

式(a7)を中立軸位置 x に関して整理すれば、次式を得る。

$$b N' x^3 + 3b \{ (M + N' y_t) - d_1 N' \} x^2 + 6n \{ A_{s1} (M + N' y_t) + A_{s2} (M + N' y_t - (d_1 - d_2) N') x - 6n \{ A_{s1} (M + N' y_t) d_1 + A_{s2} (M + N' y_t - (d_1 - d_2) N') d_2 \} = 0 \quad (\text{a8})$$

式(a8)の両辺に、 $1/(b d_1^2)$ を乗じれば、次式を得る。

$$d_1 N' \left(\frac{x}{d_1} \right)^3 + 3 \{ M + N' y_t - d_1 N' \} \left(\frac{x}{d_1} \right)^2 - 6n \left\{ \frac{A_{s1}}{b d_1} (M + N' y_t) + \frac{A_{s2}}{b d_1} (M + N' y_t - (1 - \frac{d_2}{d_1}) d_1 N') \right\} \left(\frac{x}{d_1} \right) - 6n \left\{ \frac{A_{s1}}{b d_1} (M + N' y_t) + \frac{A_{s2}}{b d_1} (M + N' y_t - (1 - \frac{d_2}{d_1}) d_1 N') \frac{d_2}{d_1} \right\} = 0 \quad (\text{a9})$$

ここで、以下のパラメータを定義する。

$$k = \frac{x}{d_1} \quad (\text{中立軸比}), \quad p_1 = \frac{A_{s1}}{b d_1} \quad (\text{引張鉄筋比}), \quad p_2 = \frac{A_{s2}}{b d_1} \quad (\text{圧縮鉄筋比}), \quad \text{および } \gamma = \frac{d_2}{d_1}$$

式(a9)が、上記パラメータにより以下のように表すことができる。

$$N' d_1 k^3 + 3 \{ M + N' y_t - N' d_1 \} k^2 + 6n \{ p_1 (M + N' y_t) + p_2 \{ (M + N' y_t) - (1 - \gamma) N' d_1 \} \} k - 6n \{ p_1 (M + N' y_t) + p_2 \gamma \{ (M + N' y_t) - (1 - \gamma) N' d_1 \} \} = 0 \quad (\text{a10})$$

さらに、以下のパラメータを定義する。

$$C = \frac{N' d_1}{M} \quad \text{および} \quad \delta = \frac{y_t}{d_1}$$

このとき、式(a10)が、次式のように書くことができる。

$$C k^3 + 3 \{ 1 - (1 - \delta) C \} k^2 + 6n \{ (p_1 + p_2) + \{ (p_1 + p_2) \delta - p_2 (1 - \gamma) \} C \} k - 6n \{ (p_1 + p_2) \gamma + \{ (p_1 + p_2) \gamma \delta - p_2 \gamma (1 - \gamma) \} C \} = 0 \quad (\text{a11})$$

ここで、

$$\eta = \frac{1 - (1 - \delta) C}{C} = \frac{1}{C} + \delta - 1 = \frac{M}{N' d_1} + \frac{y_t}{d_1} - 1 = \frac{e - y_c}{d_1}$$

を定義する。ここに、 $e = M / N'$ (軸力偏心距離)、 $y_c = d_1 - y_t$ (圧縮縁から図心までの距離) である。

軸力 N' がゼロでないとき、式(a11)の両辺を C で除し、 $\frac{1 + \delta C}{C} = 1 + \eta$ になることを考慮して書き直せば、式(a11)は次式となる。

$$k^3 + 3\eta k^2 + 6n\{p_1(1 + \eta) + p_2(\eta + \gamma)\}k - 6n\{p_1(1 + \eta) + p_2\gamma(\eta + \gamma)\} = 0 \quad (\text{a12})$$

式(a12)が中立軸位置 x を算出するための方程式となる。 k に関する 3 次方程式を解けば、中立軸比 k ($=x/d_1$) を求めることが可能である。

ここに、式(12)は吉川ら(2024)によって提示された式と一致している (ただし、吉川らの著書では上記パラメータ η を δ と表記している)。

なお、式(12)は軸力 N' がゼロでないときに適用可能であるが、 $N'=0$ の場合には、式(11)において $C=0$ とし次式が得られる。

$$k^2 + 2n(p_1 + p_2)k - 2n(p_1 + p_2\gamma) = 0 \quad (\text{a13})$$

次に、圧縮縁におけるコンクリート応力 σ'_c を求める。

式(a6)より、

$$\sigma'_c = \frac{M + N'y_t}{\frac{bx}{2}(d_1 - \frac{x}{3}) + nA_{s2}\frac{(x-d_2)}{x}(d_1-d_2)} \quad (\text{a14})$$

先に定義したパラメータを用いると、圧縮縁でのコンクリート応力として、次式を得る。

$$\sigma'_c = \frac{6k(\sigma_M + \delta\sigma_N)}{k^2(3-k) + 6np_2(k-\gamma)(1-\gamma)} \quad (\text{a15})$$

$$\text{ここに、} \sigma_M = \frac{M}{bd_1^2}, \sigma_N = \frac{N'}{bd_1}$$

また、圧縮鉄筋および引張鉄筋の応力は、式(a1)および(a2)より、次式で表される。

$$\sigma'_{s2} = n\sigma'_c \frac{x-d_2}{x} = n\sigma'_c \frac{k-\gamma}{k} \quad (\text{a16})$$

$$\sigma'_{s1} = n\sigma'_c \frac{d_1-x}{x} = n\sigma'_c \frac{1-k}{k} \quad (\text{a17})$$

【参考文献】

- 1) 吉川弘道、富山潤 (2024) : 鉄筋コンクリートの設計 第 2 版、p129、丸善出版
- 2) 吉田耕作、雨宮綾夫、伊藤清、加藤敏夫、松島與三、古谷茂 (1975) : 応用数学便覧、p14、丸善